

金融工程：重要理论问题与应用

厦门大学财务学系
郑振龙

<http://efinance.org.cn>



目录

- * 三大理论与实务问题
- * 相关资源

三大理论与实务问题

- * 理论与实务的脱节：中国期货市场
- * 理论与实务的脱节：中国期权市场
- * 理论与实务误区：资产定价方法

脱节1：中国期货市场

脱节1：2月10日三大股指现货与期货价格

代码	名称	现价	涨跌	涨跌幅	基差
000905	中证500	5388.43	61.40	1.15%	0.00
^ CFFEX 中证500指数期货					
IC2002	2020年02月	5326.4	49.8	0.94%	-62.03
IC2003	2020年03月	5276.6	44.0	0.84%	-111.83
IC2006	2020年06月	5160.0	33.0	0.64%	-228.43
IC2009	2020年09月	5088.6	28.0	0.55%	-299.83
代码	名称	现价	涨跌	涨跌幅	基差
000300	沪深300	3916.01	16.14	0.41%	0.00
^ CFFEX 沪深300指数期货					
IF2002	2020年02月	3891.4	10.8	0.28%	-24.61
IF2003	2020年03月	3889.8	8.0	0.21%	-26.21
IF2006	2020年06月	3880.0	4.0	0.10%	-36.01
IF2009	2020年09月	3851.2	-2.0	-0.05%	-64.81
代码	名称	现价	涨跌	涨跌幅	基差
000016	上证50	2850.06	-1.65	-0.06%	0.00
^ CFFEX 上证50指数期货					
IH2002	2020年02月	2834.4	1.0	0.04%	-15.66
IH2003	2020年03月	2831.0	-1.8	-0.06%	-19.06
IH2006	2020年06月	2819.0	-4.8	-0.17%	-31.06
IH2009	2020年09月	2808.6	-4.8	-0.17%	-41.46

问题

- * 中国股指期货市场价格与理论价格为何存在巨大差异？
- * 现货价格与期货价格哪个更接近真实价格？
- * 如何寻找真实的现货价格？

中国股指期货市场价格与理论价格为何存在巨大差异？

- * 西方教材书： $F = Se^{rT}$
- * 适用前提：可复制
- * 中国现货存在很大的卖空限制，现货多头可复制，现货空头难以复制。

现货价格与期货价格哪个更接近真实价格？

- * 期货价格由全体看多者与全体看空者**共同**决定。
- * 现货价格由全体看多者与**部分看空者**决定，不能反映全体参与者的真实想法。结果：现货价格被**相对高估**。
- * 结论：**期货价格更真实！**

如何寻找真实的现货价格？

* 反弹琵琶：

➤ 期货隐含现货价格

$$S^* = Fe^{-qT}$$

➤ 期权隐含现货价格

$$S^* = (c - p) + Ke^{-rT}$$

投资建议

* 利用市场错误

- * 看涨时买股指期货（或看涨期权）可以获得超额收益
- * 发行挂钩中证500股价指数的指数增强型理财产品

政策建议

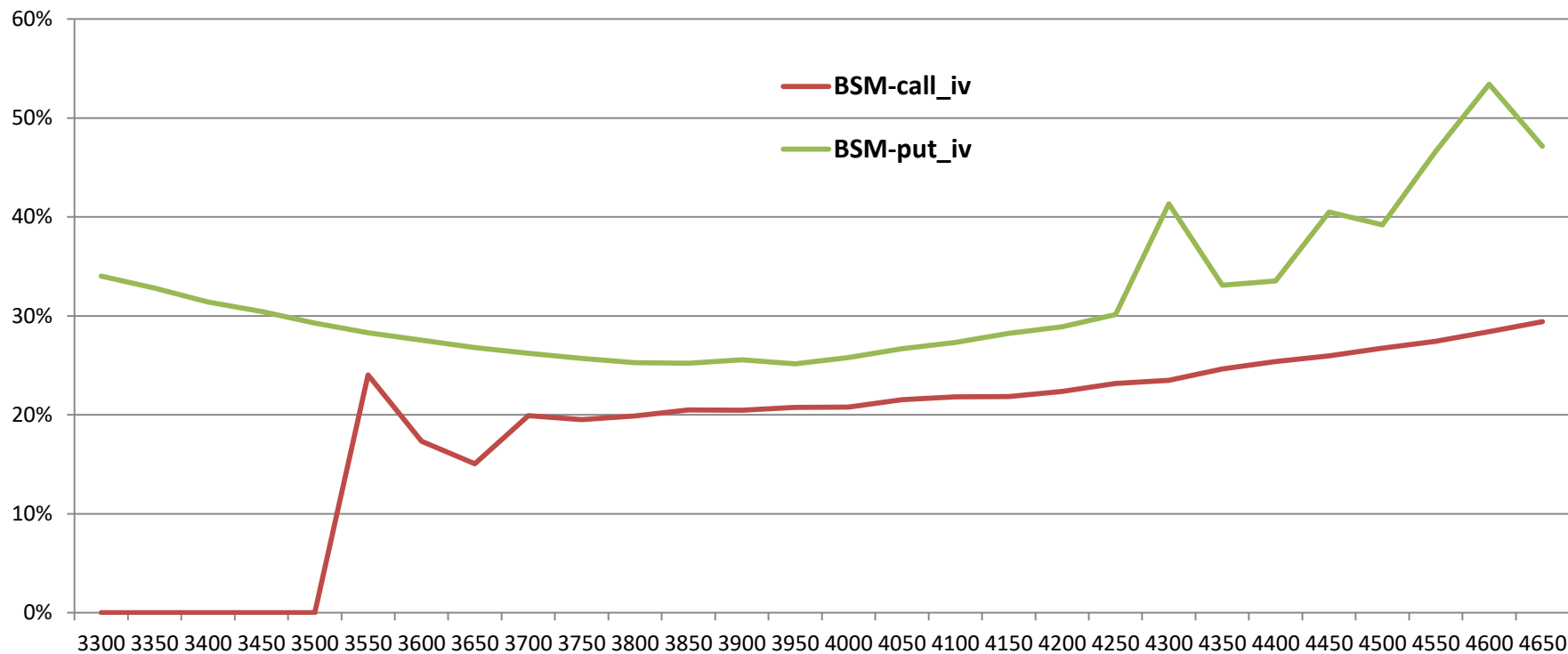
- * 完善做空机制
- * 取消涨跌停板制度
- * 减少市场分割

脱节2：中国期权市场

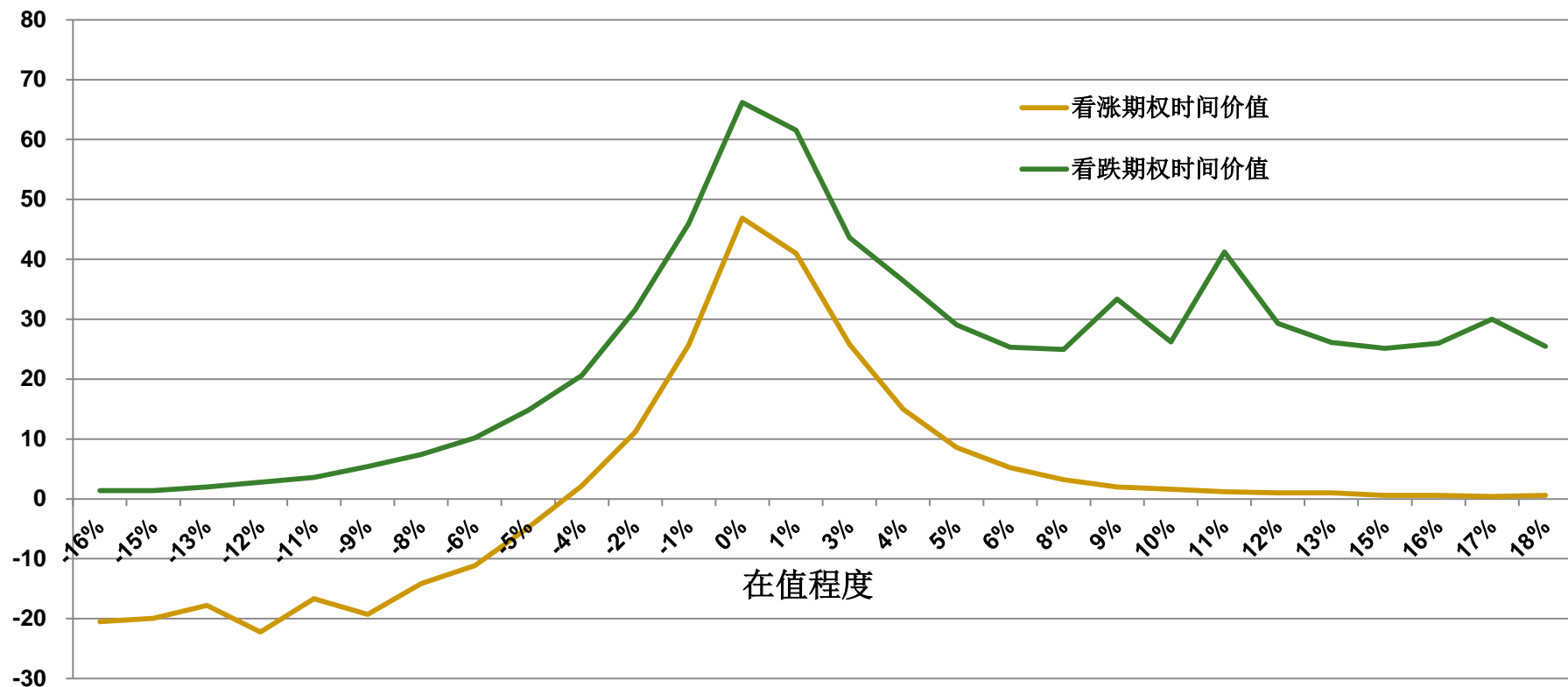
脱节2：中国期权市场（IO2003,2月10日）

代码	名称	现价	涨跌	涨跌幅	今开	最高	最低	换手率	成交量	成交额	时间
000300	沪深300	3916.01	16.14	0.41%	3872.37	3920.17	3861.01	0.54%	148.41亿	2296亿	15:00
认购						认沽					
最新价	涨跌幅	成交量	持仓量	隐含波动率	行权价	最新价	涨跌幅	成交量	持仓量	隐含波动率	
△ 2020年3月 (到期日 2020-03-20; 剩余40个自然日、30个交易日; 合约乘数 100)											
612.2	-0.49%	5	28	0.00%	3300.00	10.2	-33.77%	725	1073	33.38%	
532.2	-2.49%	0	16	0.00%	3350.00	12.0	-30.23%	416	496	32.53%	
500.2	0.28%	5	8	0.00%	3400.00	13.8	-28.12%	199	554	31.09%	
473.0	0.38%	9	14	0.00%	3450.00	16.8	-24.32%	105	278	30.12%	
394.0	-7.25%	0	26	0.00%	3500.00	20.0	-23.08%	158	340	28.97%	
387.6	1.57%	6	106	0.00%	3550.00	24.4	-20.26%	145	502	28.01%	
329.6	-2.83%	24	410	17.05%	3600.00	30.4	-17.39%	571	971	27.37%	
279.6	-5.16%	51	93	16.95%	3650.00	37.8	-15.25%	124	508	26.53%	
248.6	-3.04%	294	747	18.62%	3700.00	47.6	-14.70%	296	628	26.08%	
208.2	-4.41%	97	196	18.99%	3750.00	59.6	-12.35%	205	472	25.55%	
174.0	-6.05%	267	358	19.75%	3800.00	74.4	-11.43%	366	379	25.26%	
145.0	-5.23%	230	286	19.84%	3850.00	93.8	-9.81%	404	326	25.03%	
116.8	-8.89%	491	500	20.11%	3900.00	118.2	-6.64%	400	353	25.40%	
94.0	-10.13%	469	341	20.43%	3950.00	142.0	-7.07%	163	159	25.33%	
73.6	-12.38%	612	961	20.50%	4000.00	174.0	-5.64%	150	284	25.71%	
60.0	-13.04%	110	312	20.91%	4050.00	210.0	-3.76%	57	137	26.25%	
47.0	-15.16%	271	711	21.20%	4100.00	247.0	-3.52%	62	199	27.18%	
35.6	-21.59%	175	587	21.49%	4150.00	287.2	-2.25%	25	223	27.82%	
28.2	-25.40%	582	1426	22.03%	4200.00	328.0	-2.03%	25	173	28.68%	
23.2	-25.16%	102	376	22.71%	4250.00	372.4	-2.26%	8	119	30.02%	
18.0	-29.69%	290	688	23.29%	4300.00	457.0	7.28%	0	138	31.59%	
15.8	-29.46%	145	470	24.05%	4350.00	465.4	-1.36%	9	88	33.07%	
13.2	-31.25%	144	500	24.80%	4400.00	509.4	-1.70%	6	87	34.37%	
10.8	-36.47%	379	776	25.55%	4450.00	575.0	1.23%	1	61	35.95%	
9.2	-37.84%	226	312	26.31%	4500.00	613.6	-2.82%	2	61	36.69%	
7.8	-40.00%	148	376	27.07%	4550.00	680.8	0.09%	0	45	39.84%	
7.0	-42.62%	350	539	28.03%	4600.00	747.0	2.41%	0	64	40.49%	
6.4	-39.62%	783	814	29.04%	4650.00	769.0	-1.28%	7	68	43.06%	

BSM隐含波动率微笑 (IO2003, 2020.2.10)



内在价值与时间价值 (2月10日)



三大怪现象

- * 隐含波动率为0
- * 看跌期权时间价值明显高于看涨期权
- * 期权时间价值为负

为何出现如此现象？

□ 原因1：现货存在很大做空限制，难以用现货复制期权。

➤ 结果：BSM公式不能用！

➤ 解决方法：

● 方法1：用 S^* 代替 S ，继续使用BSM

● 方法2：改用Black公式： $c_t = e^{-rT}(F_t N(d_1) - KN(d_2))$

□ 原因2：内在价值定义不科学

➤ 解决方法：科学定义内在价值

内在价值与时间价值：常见定义

* 第一种定义：

* 看涨： $\max (S - K)$

* 看跌： $\max (K - S)$

- 如Hull(2015)、Neftci (2009)、上交所、万得资讯等

- **缺点**：没有考虑货币的**时间价值**；

没有考虑**卖空受限**的特殊情况，中国不适用

* 第二种定义：

* 看涨： $\max (S - Ke^{-r(T-t)})$

* 看跌： $\max (Ke^{-r(T-t)} - S)$

- * **缺点**：没有考虑**卖空受限**的特殊情况，中国不适用

在中国使用常用定义的问题

- 同样行权价格的看涨与看跌期权时间价值不等
- 期权时间价值可能为负
- 实值与虚值期权时间价值严重不对称
- 平值点的时间价值不是最大（当S与F偏离较大时非常明显）

解决方案

□ 科学定义内在价值

□ 要求：

- 符合期权本质特征、减少人为干扰
- 可复制，适用于中国
- 能够区分美式期权与欧式期权的不同

科学定义：两分法

- **两分法**：期权价格（价值） = 内在价值 + 时间价值
- 内在价值：**不考虑**标的资产价格**波动**的情况下，期权条款赋予期权多头的**最高**价值。由于期权多头只有权力没有义务，期权的内在价值应该**大于0**。
- 期权的时间价值是在期权尚未到期时，标的资产价格的**波动**为期权多头带来收益的可能性所隐含的价值（即：波动带来的价值）。由于权利和义务不对称，期权时间价值应该**大于0**。
- 时间价值会受内在价值的影响，但内在价值不受时间价值的影响。所以可以使用**两分法**。
- 按这种两分法，我们算出各种期权的内在价值。

欧式看涨期权的内在价值

- 如果不考虑波动，欧式看涨期权权利方与远期合约多头的**唯一区别**就是前者只有权利没有义务。因此，看涨期权内在价值就是

$$\max(f(t, T), 0) = \max\left((F(t, T) - K)e^{-r(T-t)}, 0\right)$$

注：这里的f为远期合约的市场价值，F为市场远期价格。

不完美市场中期权的内在价值

看涨期权	欧式	无红利	$\max\left((F - K)e^{-r(T-t)}, 0\right)$
		有红利	
		红利率	
	美式	无红利	$\max(\max_i(F(t, \tau_i) - K)e^{-r(\tau_i-t)}, 0)$
		有红利	
看跌期权	欧式	无红利	$\max\left((K - F)e^{-r(T-t)}, 0\right)$
		有红利	
		红利率	
	美式	无红利	$\max(\max_i(K - F(t, \tau_i))e^{-r(\tau_i-t)}, 0)$
		有红利	

平值点（不完美）

看涨期权	欧式	无红利	F
		有红利	
		红利率	
	美式	无红利	$\max_i(F(t, \tau_i))$
		有红利	$\max_i(F(t, \tau_i))$
看跌期权	欧式	无红利	F
		有红利	
		红利率	
	美式	无红利	$\min_i(F(t, \tau_i))$
		有红利	$\min_i(F(t, \tau_i))$

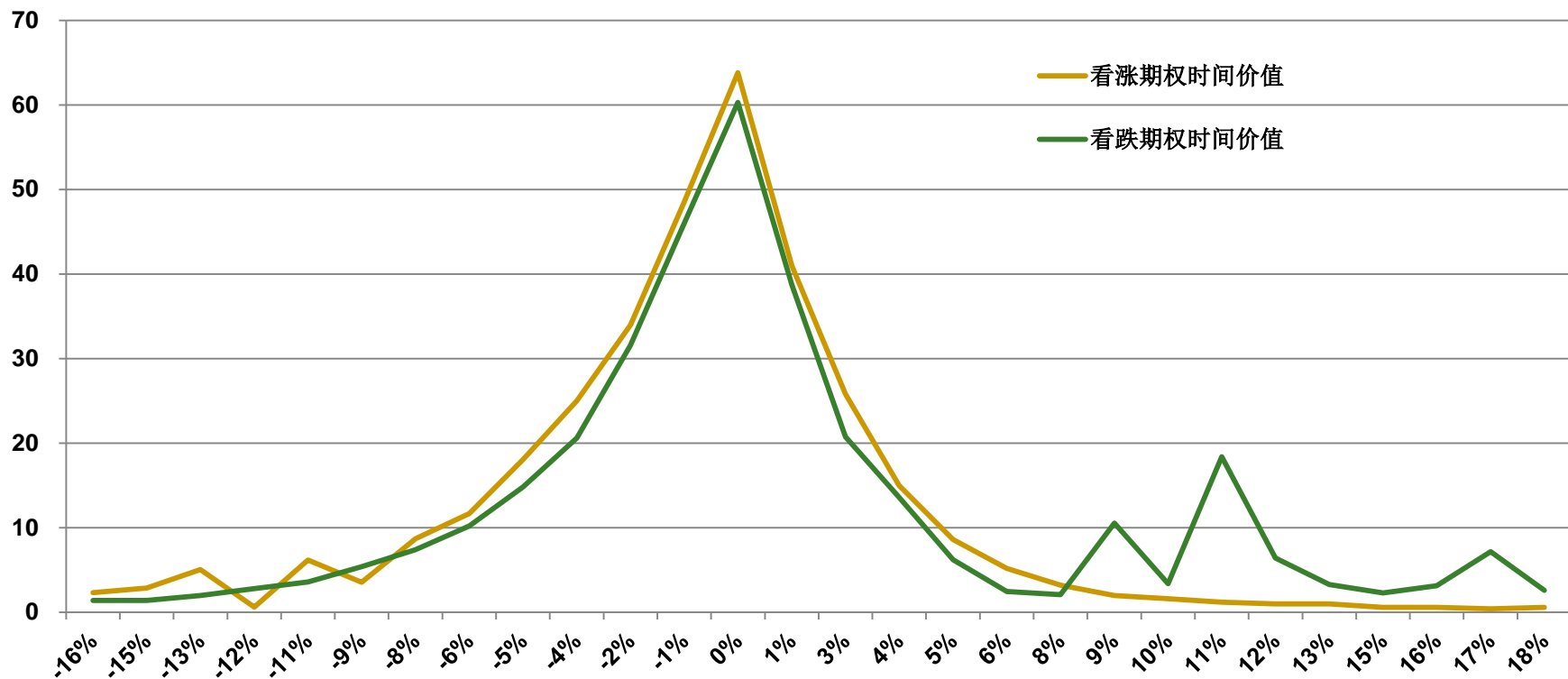
两分法定义的优点

- 期权的时间价格不会小于0
- 期权的时间价值都在平值点最大
- 同样行权价欧式看涨和看跌期权的时间价值相等
- 所有期权价格的下限就是其内在价值
- 可以解释美式平值看涨与看跌期权价格不同的问题：平值点不同

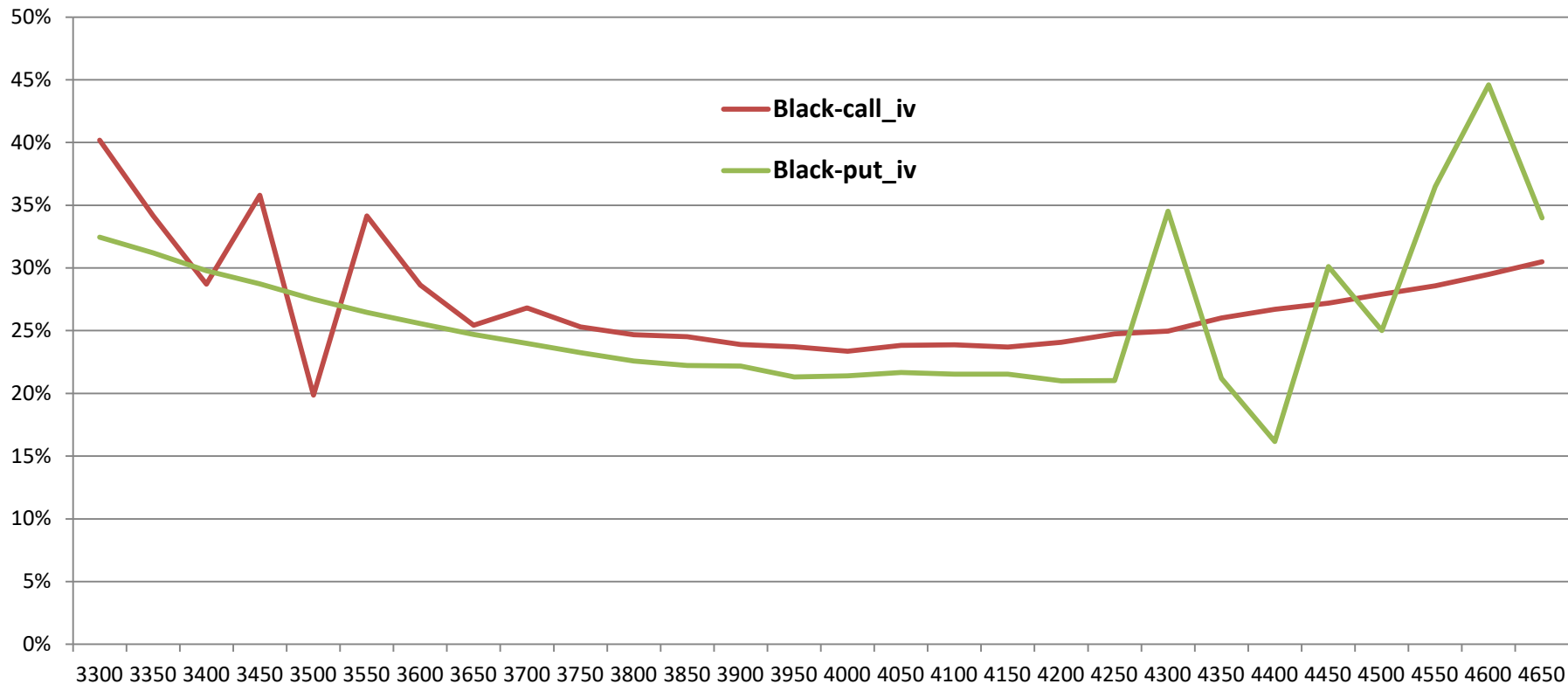
在值程度的常见定义

- * 第一种： $K - K_{\text{ATM}}$
- * 第二种： K / K_{ATM}
- * 第三种： $\ln \frac{K}{K_{\text{ATM}}}$
- * 我们采用第三种 $\ln \frac{K}{F}$ 。原因：值域范围为 $(-\infty, +\infty)$ ，这样虚值和实值程度在幅度上可以对称，有利于比较。
- * 之所以没有区分看涨和看跌的在值程度度量公式，则是为了方便在**同一张图**中表示看涨期权和看跌期权的在值程度。

正确的姿势(时间价值, OI2003, 2020.2.10)



Black隐含波动率微笑 (OI2003, 2020.2.10)



中国的PCP

* 不能使用

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S$$

* 只能使用

$$c = p + (F - K)e^{-r(T-t)}$$

* 对于平值期权($F = K$)

$$c = p$$

定价方法误区

两个常见错误

* 学术界常见错误：

对任何衍生品：假定这是风险中性世界，...

* 实务界常见错误：

这个假定跟现实太脱节了，结论不可信！

基本原理：测度转换

- 假设两期模型，三种状态
- 任意资产的价格都等于它在各种状态下的回报期望的贴现值之和：

$$S = P_1 M_1 X_1 + P_2 M_2 X_2 + P_3 M_3 X_3 = E(MX) \quad (1)$$

$$\text{注意：} S \neq ME(X) = \frac{E(X)}{1+y}$$

- 对公式 (9) 进行数学变换，可得

$$S = M^Q \left(\frac{P_1 M_1}{M^Q} X_1 + \frac{P_2 M_2}{M^Q} X_2 + \frac{P_3 M_3}{M^Q} X_3 \right)$$

- 令 $Q_i = \frac{M_i}{M^Q} P_i$ ，则有

$$S = M^Q (Q_1 X_1 + Q_2 X_2 + Q_3 X_3) = M^Q E^Q(X) \quad (2)$$

风险中性测度

- * 在 Q 测度下，所有状态的贴现因子都相等，因此 Q 测度被人们称为**风险中性测度**。
- * M^Q 被称为**无风险贴现因子**。如果现实当中无风险利率存在， M^Q 的倒数就等于 $1 + \text{无风险利率}$ 。
- * 两个测度的关系：

$$Q_i = \frac{M_i}{M^Q} P_i$$

风险中性定价的基本思路与步骤

- * 风险中性定价法的**基本思路**是：为了定价方便，我们可以从现实测度转换到风险中性测度，定价结果适用于现实测度。如果新产品是**可复制**的，定价结果将是唯一的。
- * 风险中性定价法的**基本步骤**是：将现实世界的客观测度（P测度）转换到Q测度，在Q测度下计算资产的预期回报 $E^Q(X)$ ，再以 M^Q 贴现计算其现值。

例子

- * 假设下一时刻（1时刻）世界只能处于三种状态之一。在当前时刻(0时刻)，市场上只有两种无法相互复制的可交易资产A和B，价格分别为8元和9元，它们在1时刻在三种状态下的回报分别为（10， 8， 0）和（8， 12， 0）。求1时刻到期、行权价格为7元、标的资产为A的看涨期权价格。

风险中性定价法基本步骤

- **测度转换**：利用现有可交易资产的价格，我们可以求解 $M_i P_i$ ，并据此转换到风险中性测度。

$$10M_1P_1 + 8M_2P_2 + 0M_3P_3 = 8$$

$$8M_1P_1 + 12M_2P_2 + 0M_3P_3 = 9$$

求解可得： $M_1P_1=3/7$, $M_2P_2=13/28$

由此可得： $Q_1 = \frac{3}{7MQ}$, $Q_2 = \frac{13}{28MQ}$, $Q_3 = 1 - \frac{25}{28MQ}$

- 计算在风险中性测度下该期权回报的**期望值**。

$$3 \times Q_1 + 1 \times Q_2 + 0 \times Q_3 = \frac{9}{7MQ} + \frac{13}{28MQ}$$

- 用 M^Q **贴现**求出该期权价格：

$$c = M^Q \left(\frac{9}{7MQ} + \frac{13}{28MQ} \right) = 1.75$$

讨论

- 本例属于**不完全市场**，因此 M^Q 不是唯一的。但由于该期权可以由可交易资产A和B**复制**出来，因此仍然可以对该期权进行精确定价。
- 而对于**不能被复制**的新资产，由于 M^Q 仍是未知变量，所以我们无法求得新资产的精确价格，但我们可以利用概率测度的性质和贴现因子的经济含义确定 M^Q 的合理范围，从而确定新资产价格的**合理范围**。
- 利用 $Q_1 + Q_2 \leq 1$ 的性质，我们从 $M^Q(Q_1 + Q_2) = 3/7 + 13/28 = 25/28$ 可知 $M^Q \geq 25/28$ 。而在正常情况下， M^Q 应该小于等于1。因此 M^Q 的合理取值范围为 $25/28 \leq M^Q \leq 1$ 。

例子

- 有一种资产，它在1时刻的回报为 $(3, 2, 1)$ ，那么它的合理价格等于多少呢？
- 我们如果取 $M^Q = 1$ ，则可以求得 $Q_1 = 3/7$, $Q_2 = 13/28$, $Q_3 = 3/28$ 。则该资产的价格应该等于 $3 \times 3/7 + 2 \times 13/28 + 3/28 = 2.32$ 元。
- 我们如果取 $M^Q = 25/28$ ，则可以求得 $Q_1 = 48\%$, $Q_2 = 52\%$, $Q_3 = 0$ 。则该资产的价格应该等于 $25/28 (3 \times 48\% + 2 \times 52\%) = 2.21$ 元。这样我们就可以确定该资产的合理范围在 $2.21 \sim 2.32$ 之间。
- 从这个例子来看，对于可复制产品的定价，风险中性定价法并不一定是最简单易懂的方法。但它的优势在于它可以从可交易资产的价格中计算出不可复制资产的合理范围。

结论

- * 可复制：定价才有唯一解
- * 无套利：可确定合理范围

相关资源

* 国家级精品资源共享课：本人主讲的《金融工程》（第3版）：

www.icourses.cn/sCourse/course_6080.html

- 进入这个链接后可手机扫码下载APP。

* 课程网址：<http://efinance.org.cn/kcjx/34.html>

* 《金融工程》（第5版）将于7月面世

* 正在制作新的在线开放课程

* 今年7月在厦大主办《金融工程》师资培训班。

